Einkommensteuertarif

Herleitung der Zahlenwerte

Prof. Dr. Andreas Pfeifer, Hochschule Darmstadt

Februar 2015

In diesem Beitrag wird erklärt, wie die Berechnungsformeln des Tarifs der Einkommensteuer[1] in Deutschland ermittelt wurden. Dazu wird zunächst der Tarif angegeben und beschrieben. Anschließend werden die Tarifformeln mit den konkreten Zahlenwerten hergeleitet.

Übersicht **Seite**

1 Beschreibung des Einkommensteuertarifs

Im Folgenden ist der Steuertarif in Deutschland zur Berechnung der tariflichen Einkommensteuer laut Einkommensteuergesetz (EStG) angegeben:

§ 32a Einkommensteuertarif, gültig ab Veranlagungszeitraum 2014:

(1) Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen[2]. Sie beträgt ... jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 8.354 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 8.355 Euro bis 13.469 Euro: $(974{,}58 \cdot y + 1.400) \cdot y$;
3. von 13.470 Euro bis 52.881 Euro: $(228{,}74 \cdot z + 2.397) \cdot z + 971$;
4. von 52.882 Euro bis 250.730 Euro: $0{,}42 \cdot x - 8.239$;
5. von 250.731 Euro an: $0{,}45 \cdot x - 15.761$.

„y" ist ein Zehntausendstel des den Grundfreibetrag übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens.
„z" ist ein Zehntausendstel des 13.469 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens.
„x" ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen.
Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

(5) Bei Ehegatten, die ... zusammen zur Einkommensteuer veranlagt werden, beträgt die tarifliche Einkommensteuer ... das Zweifache des Steuerbetrags, der sich für die Hälfte ihres gemeinsam zu versteuernden Einkommens ... ergibt (Splitting-Verfahren).[3]

---

[1] In der Behörden- oder Fachsprache und im Gesetzestext wird bei den Zusammensetzungen mit „–steuer" das Fugen-s weggelassen. Neben diesem Gebrauch ist laut Duden auch die Schreibweise mit Fugen-s korrekt, z. B. Einkommenssteuer oder Abgeltungssteuer.

[2] Zur Ermittlung des zu versteuernden Einkommens, siehe Pfeifer (2009), S. 421 f.

[3] Die Regelungen des Einkommensteuergesetzes zu Ehegatten und Ehen sind auch auf Lebenspartner und Lebenspartnerschaften anzuwenden.

Damit ergibt sich folgende Funktion für die Einkommensteuer in Abhängigkeit des zu versteuernden Einkommens:

$$\mathrm{ESt}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } [x] \in [0;\ 8.354] \\ [\,(974{,}58 \cdot y + 1.400) \cdot y\,] & \text{für } [x] \in (8.354;\ 13.469] \\ [\,(228{,}74 \cdot z + 2.397) \cdot z + 971\,] & \text{für } [x] \in (13.469;\ 52.881] \\ [\,0{,}42 \cdot [x] - 8.239\,] & \text{für } [x] \in (52.881;\ 250.730] \\ [\,0{,}45 \cdot [x] - 15.761\,] & \text{für } [x] \in (250.730;\ \infty) \end{cases}$$

wobei $y = \dfrac{[x]-8.354}{10000}$, $z = \dfrac{[x]-13.469}{10000}$ und [x] das auf ganze Euro abgerundete zu versteuernde Einkommen ist. Die eckige Klammer bedeutet die Abrundung auf volle Euro.

Auf die Angabe Euro wurde in der obigen Formel der Übersichtlichkeit wegen verzichtet. Auch in folgenden wird auf die Angabe Euro verzichtet.

Bemerkung:

Für Ehepaare und eingetragene Lebenspartner, die bei der Einkommensteuer zusammen veranlagt werden, wird das Einkommen beider Ehegatten bzw. Lebenspartner addiert. Anschließend wird für die Hälfte des gemeinsamen Einkommens die Einkommensteuer berechnet und dieser Steuerbetrag dann verdoppelt. Nach § 32a gilt also beim Splitting-Verfahren für die Einkommensteuer in Abhängigkeit des zu versteuernden Einkommens x:

$$\mathrm{ESt\_Splitting}(x) = 2 \cdot \mathrm{ESt}\left(\tfrac{x}{2}\right).$$

Beispiel:

Bei einem zu versteuernden Jahreseinkommen von 56.002,50 € ergibt sich eine Einkommensteuer von 15.281 € bei Verwendung des Grundtarifs:
Das zu versteuernde Jahreseinkommen wird zunächst auf volle Euro abgerundet, also auf 56.002 €. Dieser Wert liegt im vierten Tarifbereich.
$0{,}42 \cdot 56.002 - 8.239$ ergibt 15.281,84.
Diese Zahl wird auf volle Euro abgerundet, um die Einkommensteuer zu ermitteln. Also ESt(56.002,50) = 15.281.

Bei Ehegatten mit einem gesamten zu versteuernden Einkommen von 56.002,50 € ist das Doppelte der Steuer für 28.001,25 € zu zahlen:
Für die auf volle Euro abgerundete Hälfte des Einkommens, also für 28.001 € ergibt sich nach dem dritten Tarifbereich

$$\left(228{,}74 \cdot \frac{28.001-13.469}{10.000} + 2\,397\right) \cdot \frac{28.001-13.469}{10.000} + 971 = 4.937{,}37.$$

Abgerundet auf volle Euro und anschließend mit zwei multipliziert ergibt eine Einkommensteuer von $2 \cdot 4.937$ € = 9.874 €.

•

In Abb. 1 ist die Einkommensteuer in Abhängigkeit des zu versteuernden Einkommens dargestellt.

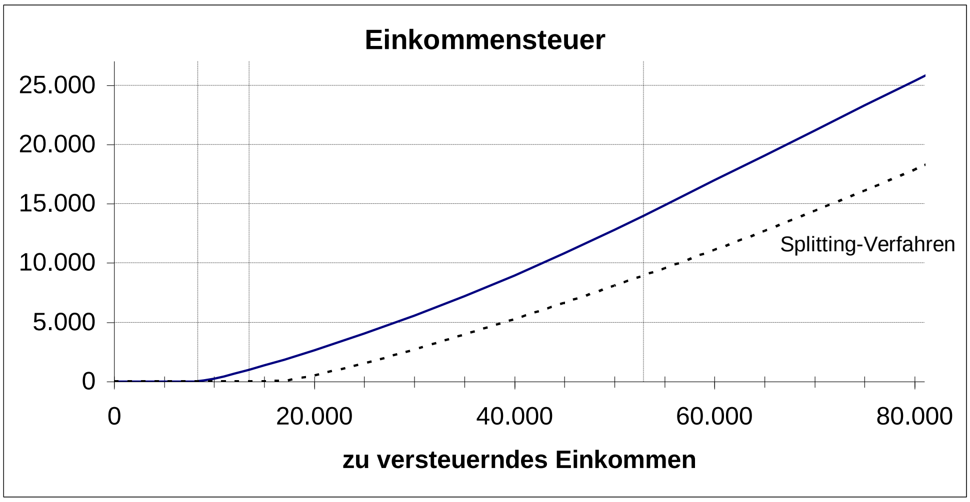

Abb. 1: Einkommensteuer.
Grundtarif (durchgezogene Linie), Splitting-Verfahren (gestrichelte Linie)

Bemerkungen:

– Bis zur Höhe des Grundfreibetrags ist keine Einkommensteuer zu zahlen.
Im Bereich von 8.354 € bis 13.469 € ist die Einkommensteuer in Abhängigkeit des zu versteuernden Einkommens eine quadratische Funktion, wenn man von der Rundung in den Formeln absieht. Im Bereich von 13.470 € bis 52.881 € ist sie eine andere quadratische Funktion.
Ab einem Einkommen von 52.882 € ist die Einkommensteuer dann eine lineare Funktion mit der Steigung (= Grenzsteuersatz[1]) von 0,42 und ab 250.731 € mit der Steigung (= Grenzsteuersatz) von 0,45.

– Wird Abb. 1 betrachtet, scheint die Einkommensteuerfunktion stetig zu sein. Sie ist es aber nicht, denn für beispielsweise $x \in [13\,474; 13\,475)$ ist die $\mathrm{ESt}(x) = 971$. Für $x = 13\,475$ ist $\mathrm{ESt}(x) = 972$. Also ist die Einkommensteuerfunktion ESt an der Stelle $x = 13\,475$ nicht stetig. Genauso kann man andere Stellen finden, an denen die Funktion nicht stetig ist. Dies liegt an der Rundung der Funktion, vgl. §32a, Absatz 1, letzter Satz.

– Wieso werden im fünften Tarifbereich 15.761 Euro (siehe Einkommensteuertarif) abgezogen?
Es muss gewährleistet sein, dass der Steuerzahler im Übergangsbereich bei höherem Einkommen netto (= Einkommen minus Einkommensteuer) nicht weniger hat als bei niedrigerem Einkommen.
Bei 250.730 € zu versteuerndem Einkommen sind 97.067 € Einkommensteuer zu zahlen, da

$$0{,}42 \cdot 250.730 \;-\; 8.239 \;=\; 97.067{,}60.$$

Dann – mit höherem Einkommen – erhöht sich der Anteil auf 45% = 0,45.
Es gilt:

$$0{,}45 \cdot 250.730 \;= 112.828{,}50 \quad \text{und} \quad 112.828 \;- 97.067 \;=\; 15.761.$$

Man zieht deshalb von $0{,}45 \cdot x$ genau 15.761 ab. Dadurch ist beim Übergang der beiden Formeln genau die gleiche Steuer mit den beiden Formeln zu zahlen.

Der **Durchschnittssteuersatz (DSt)** ergibt sich aus der Einkommensteuer in Euro, geteilt durch das zu versteuernde Einkommen, also

$$\mathrm{DSt}(x) = \frac{\mathrm{ESt}(x)}{x}.$$

1 Zum Begriff Grenzsteuer siehe nächste Seite.

Der **Grenzsteuersatz**[1] **(GSt)** oder **Marginalsteuersatz** gibt an, um wie viele Euro die Steuer (näherungsweise) steigt, wenn das Einkommen um einen Euro steigt.
Liegt eine differenzierbare Steuerfunktion vor, ist der Grenzsteuersatz die erste Ableitung (= Steigung) der Steuerfunktion S nach dem zu versteuernden Einkommen:

$$\mathrm{GSt}(x) = \frac{d\,\mathrm{ESt}(x)}{dx},$$

wobei ESt(x) die zu zahlende Einkommensteuer bei einem zu versteuernden Einkommen von x ist.[2]

Wegen der Rundung der Werte bei der Steuerberechnung der Einkommensteuerfunktion gilt:

$$\mathrm{ESt}'(x) = \begin{cases} \text{existiert nicht} & \text{an Sprungstellen der Einkommensteuerfunktion} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Daher wird zur Berechnung der Grenzsteuer die folgende ungerundete Einkommensteuerfunktion, bezeichnet mit EStu, verwendet:

$$\mathrm{EStu}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0;\ 8\,354] \\ (974{,}58 \cdot y + 1\,400) \cdot y & \text{für } x \in (8\,354;\ 13\,469] \\ (228{,}74 \cdot z + 2\,397) \cdot z + 971 & \text{für } x \in (13\,469;\ 52\,881] \\ 0{,}42 \cdot x - 8\,239 & \text{für } x \in (52\,881;\ 250\,730] \\ 0{,}45 \cdot x - 15\,761 & \text{für } x \in (250\,730;\ \infty) \end{cases}$$

wobei $y = \frac{x - 8.354}{10.000}$, $z = \frac{x - 13.469}{10.000}$ und x das zu versteuernde Einkommen ist.

Die ungerundete Einkommensteuerfunktion EStu ist, da sie sich aus Polynomfunktionen zusammensetzt, in jedem Tarifbereich stetig und differenzierbar.

Jetzt kann in jedem Tarifbereich die Ableitung und die zweite Ableitung gebildet werden. Unter Verwendung der Kettenregel folgt:

$$\frac{d\,\mathrm{EStu}(x)}{dx} = \mathrm{EStu}'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 8.354 \\ \frac{2 \cdot 974{,}58y + 1.400}{10.000} & \text{für } 8.354 < x < 13.469 \\ \frac{2 \cdot 228{,}74z + 2.397}{10.000} & \text{für } 13.469 < x < 52.881 \\ 0{,}42 & \text{für } 52.881 < x < 250.730 \\ 0{,}45 & \text{für } 250.730 < x \end{cases}$$

$$\mathrm{EStu}''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 8.354 \\ \frac{2 \cdot 974{,}58}{10.000^2} & \text{für } 8.354 < x < 13.469 \\ \frac{2 \cdot 228{,}74}{10.000^2} & \text{für } 13.469 < x < 52.881 \\ 0 & \text{für } 52.881 < x < 250.730 \\ 0 & \text{für } 250.730 < x \end{cases}$$

---

1 Oft auch als **Spitzensteuersatz** bezeichnet.
Andere Definition: Der **Spitzensteuersatz** ist der höchste nach dem Steuertarif in Betracht kommende Grenzsteuersatz, d.h., beim Einkommensteuertarif 2014 ist er 45%.

2 In der Praxis wird für den Grenzsteuersatz die Ableitung der ungerundeten Einkommensteuerfunktion verwendet. Genaueres dazu steht auf der nächsten Seite.

Für die Berechnung des Grenzsteuersatzes wird üblicherweise die Ableitung der ungerundeten Einkommensteuerfunktion verwendet, also

$$GSt(x) = EStu'(x) .$$

An den Bereichsübergangsstellen 8.354, 13.469, 52.881 und 250.730 existiert keine Ableitung der ungerundeten Einkommensteuerfunktion. Als Grenzsteuersatz wird üblicherweise dann an den Übergangsstellen der rechtsseitige Grenzwert verwendet, also

$$GSt(\text{Bereichsübergangsstelle}) = \lim_{\substack{x \to \text{Bereichsübergangsstelle} \\ x > \text{Bereichsübergangsstelle}}} EStu'(x) .$$

Mit **Eingangssteuersatz** wird derjenige Grenzsteuersatz bezeichnet, der sich bei Verwendung des zweiten Tarifbereichs in §32a an der Stelle x = Grundfreibetrag ergibt. Er beträgt 14%, da

$$\lim_{\substack{x \to \text{Grundfreibetrag} \\ x > \text{Grundfreibetrag}}} EStu'(x) = \lim_{\substack{x \to 8.354 \\ x > 8,354}} \frac{2 \cdot 974,58 \cdot \frac{x\text{-}8.354}{10.000} y + 1.400}{10.000} = 0,14.$$

In Abb. 2 sind der Grenzsteuersatz[1] und der Durchschnittssteuersatz in Abhängigkeit des zu versteuernden Einkommens dargestellt. Bis zum Grundfreibetrag sind der Grenzsteuersatz und der Durchschnittssteuersatz null. Der Kurve des Grenzsteuersatzes besteht aus Geradenstücken. Dies liegt daran, dass die Steuerfunktionen lineare oder quadratische Funktionen sind. Die Ableitung einer linearen Funktion ist eine Konstante und die Ableitung einer quadratischen Funktion ist eine lineare Funktion
Quelle: Pfeifer (2009).

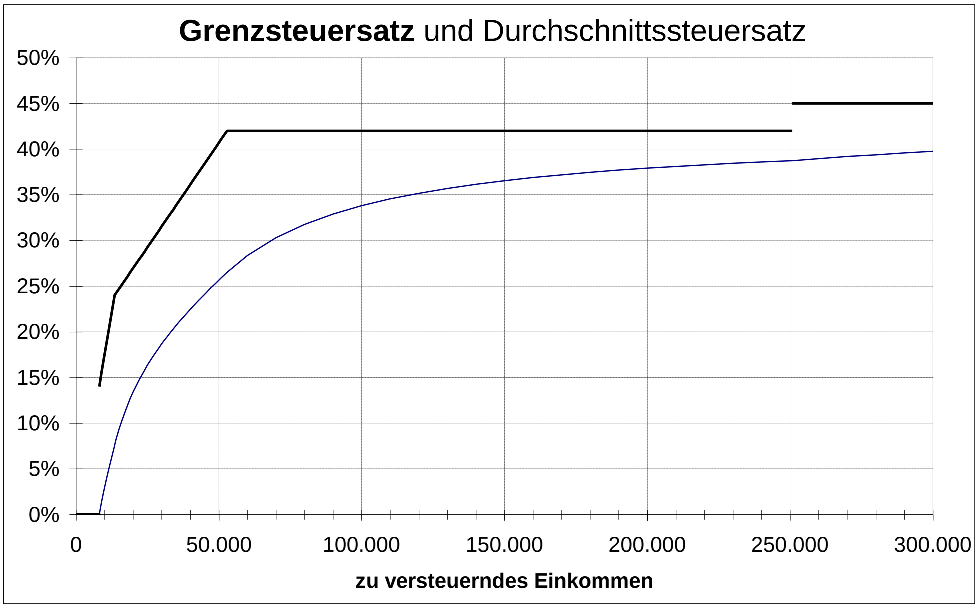

Abb. 2: Grenz- und Durchschnittssteuersatz (gestrichelte Linie), jeweils Grundtarif.

[1] Dabei wird bei der Berechung des Grenzsteuersatzes die ungerundete Steuerfunktion (also unter Vernachlässigung der Rundungsvorschriften des § 32a EStG) verwendet.

Ist der Grenzsteuersatz umso höher, je höher das zu versteuernde Einkommen ist, wird der Steuertarif als **Progressivtarif** bezeichnet.

Was progressiv heißt, ist jedoch in der Literatur nicht einheitlich definiert, vgl. Pfeifer (2013). Im Folgenden wird eine formelmäßige Definition von progressiv angegeben, die keine Ableitung benötigt:

Def. (progressiv):
Ein Steuertarif S heißt **progressiv** (bzw. **schwach progressiv**),
wenn für alle $0 < x_1 < x_2$ gilt:

$$\frac{S(x_1)}{x_1} < \frac{S(x_2)}{x_2} \qquad \left(\text{bzw. } \frac{S(x_1)}{x_1} \le \frac{S(x_2)}{x_2}\right).$$

2 Ermittlung der Formeln des Einkommensteuertarifs

Die Formeln in § 32a EStG zur Berechnung der Einkommensteuer werden nach bestimmten Regeln ermittelt. Die Politik gibt gewisse Grenzsteuersätze und Tarifbereiche vor. Anschließend werden unter diesen Voraussetzungen die Formeln berechnet. Diese Berechnung wird im Folgenden für den Einkommensteuertarif 2014 durchgeführt.

Nach der Rechtsprechung des Bundesverfassungsgerichts und dem Existenzminimumbericht der Bundesregierung ergibt sich, dass 2014 ein Grundfreibetrag von 8.354 Euro steuerfrei sein muss, und nicht 8.130 Euro wie im Jahr 2013.
2013 galt folgende Einkommensteuerfunktion:

$$\mathrm{EStu}_{2013}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0;\ 8\,130] \\ (933{,}70 \cdot y + 1.400) \cdot y & \text{für } x \in (8.130;\ 13.469] \\ (228{,}74 \cdot z + 2.397) \cdot z + 1.014 & \text{für } x \in (13.469;\ 52.881] \\ 0{,}42 \cdot x - 8.196 & \text{für } x \in (52.881;\ 250.730] \\ 0{,}45 \cdot x - 15.718 & \text{für } x \in (250.730;\ \infty) \end{cases}$$

wobei $y = \dfrac{x - 8.130}{10.000}$ und $z = \dfrac{x - 13.469}{10.000}$.

Genauer: Der Einkommensteuertarif 2014 sollte weiterhin aus 5 Tarifbereichen bestehen. Die Tarifbereichsgrenzen liegen bei 13.469 Euro, 52.881 Euro und 250.730 Euro, denn

		Tarifeigenschaften			
Tarif-be-reich		2009	2010 – 2012	2013	2014
1	Beginn	0 €	0 €	0 €	0 €
	GSt	0%	0%	0%	0%
	Funktion	N	N	N	N
2	Beginn	7.834 €	8.004 €	8.130 €	8.354 €
	GSt	14%	14%	14%	14%
	Funktion	Q	Q	Q	Q
3	Beginn	13.139 €	13.469 €	13.469 €	13.469 €
	GSt	23,97%	23,97%	23,97%	23,97%
	Funktion	Q	Q	Q	Q
4	Beginn	52.551 €	52.881 €	52.881 €	52.881 €
	GSt	42%	42%	42%	42%
	Funktion	L	L	L	L
5	Beginn	250.400 €	250.730 €	250.730 €	250.730 €
	GSt	45%	45%	45%	45%
	Funktion	L	L	L	L

Abb. 3: Festlegungen beim Steuertarif (GSt = Grenzsteuersatz bei Beginn des Tarifbereichs, N = Nullfunktion, L = lineare Funktion, Q = quadratische Funktion)

diese Tarifbereichsgrenzen galten schon seit 2010 (vgl. Pfeifer (2009), S. 422 f.) und sollten nicht angepasst werden. Nur der Grundfreibetrag war von 8.130 auf 8.354 anzupassen. Auch sollte die Einkommensteuerfunktion im zweiten und dritten Tarifbereich weiterhin eine quadratische Funktion sein. Außerdem hatte die Politik festgelegt, dass die folgenden Grenzsteuersätze gleich bleiben sollen:

1. Eingangssteuersatz: 14%.
2. Grenzsteuersatz bei einem Einkommen von 13.470 Euro: 23,97%.
3. Grenzsteuersatz bei einem Einkommen von 52.881 Euro: 42%.
4. Grenzsteuersatz bei einem Einkommen von 250.730 Euro: 45%.

Daraus kann nun die Steuerfunktion für das Jahr 2014 berechnet werden.

Berechnung der Formel für den 1. Tarifbereich:
Für die Einkommensteuerfunktion s gilt: $s(x) = 0$ für alle $x \in [0; 8354]$, da bis zu einem zu versteuernden Einkommen in Höhe des Grundfreibetrags keine Einkommensteuer zu zahlen ist.

Berechnung der Formel für den 2. Tarifbereich:
Die Einkommensteuerfunktion s soll ein Polynom 2. Ordnung (quadratische Funktion) sein. Es bietet sich zunächst an, die Funktion $s(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ anzusetzen und die unbekannten Parameter $a_{2,}$ a_1 und a_0. zu ermitteln. Da die Funktion s aber mit der Steuerfunktion 2013 vergleichbar sein soll, wird folgende Form einer quadratischen Funktion angesetzt

$$s(x) = a \cdot \left(\frac{x - 8.354}{10.000}\right)^2 + b \cdot \frac{x - 8.354}{10.000} + c\,.$$

Die Steuersätze bei bestimmten Einkommen sind vorgegeben, d. h., es muss gelten

(i)	$s(8.354) = 0$,	da bis einem zu versteuernden Einkommen von 8.354 Euro keine Steuern zu zahlen sind;
(ii)	$s'(8.354) = 0{,}14$,	da der Eingangssteuersatz bei 14% liegen soll;
(iii)	$s'(13.469) = 0{,}2397$,	damit die Grenzsteuersätze 23,97% beträgt.

Wegen (i) folgt sofort $c = 0$.

Aus $s'(x) = 2a \cdot \frac{x - 8.354}{10.000^2} + b \cdot \frac{1}{10.000}$ und (ii) folgt

$b \cdot \frac{1}{10.000} = 0{,}14$ und somit $b = 1.400$.

Aus (iii) folgt $2a \cdot \frac{13.469 - 8.354}{10.000^2} + b \cdot \frac{1}{10.000} = 0{,}2397$ und daraus

$2a \cdot 5.115 = (2.397 - 1.400) \cdot 10.000$ Also $a = \frac{(2.397 - 1.400) \cdot 10.000}{2 \cdot 5.115} = 974{,}58455$.

Wird der Parameter auf zwei Dezimalstellen gerundet, ergibt sich:

$s(x) = 974{,}58 \cdot \left(\frac{x - 8.354}{10.000}\right)^2 + 1.400 \cdot \frac{x - 8.354}{10.000}$, also genau die Zahlenwerte im Gesetzestext.

An der Tarifbereichsobergrenze von 13.469 ergibt sich eine Einkommensteuer von

$$s(13.469) = 974{,}58 \cdot \left(\frac{13.469 - 8.354}{10.000}\right)^2 + 1.400 \cdot \frac{13.469 - 8.354}{10.000} = 971{,}0815582$$

bzw. 971 mit Rundung auf volle Euro. (*)

Berechnung der Formel für den 3. Tarifbereich:
Anlag dem 2. Tarifbereich kann die Formel für den dritten Tarifbereich ermittelt werden. Es ergibt sich dann bei einem Einkommen von 52881 eine Steuer von

$$s(52.881) = 228{,}74 \cdot \left(\frac{52.881 - 13.469}{10.000}\right)^2 + 2.397 \cdot \frac{52.881 - 13.469}{10.000} + 971 = 13971{,}088. \quad (**)$$

Berechnung der Formel für den 4. Tarifbereich:
Es muss gelten: $s(x) = ax + b$ mit $s'(x) = 0{,}42$ und $s(52.881) = 13.971$, wegen (**).
Daraus folgt sofort $a = 0{,}42$ und wegen $13.971 = 0{,}42 \cdot 52.881 + b$ folgt $b = -8.239{,}03$.
Damit gilt für den vierten Tarifbereich $s(x) = 0{,}42 \cdot x - 8.239$.
Daraus folgt $s(250.730) = 97.067{,}60$ bzw. 97.067, (***)
da die Steuer auf volle Euro abgerundet wird.

Berechnung der Formel für den 5. Tarifbereich:
Damit der Übergang zum fünften Tarifbereich stetig verläuft, muss für diesen Tarifbereich, der linear sein soll, gelten:
$s(x) = ax + b$ mit $s'(x) = 0{,}45$ und $s(250.730) = 97.067$ wegen (***).
Daraus folgt $a = 0{,}45$ und $97.067 = 0{,}45 \cdot 250.730 + b$. Also $b = -15.761{,}5$. Dann gilt für den fünften Tarifbereich $s(x) = 0{,}45 \cdot x - 15.761$.

Bemerkung:
Die ungerundete Einkommensteuerfunktion ist wegen der Rundung der berechneten Zahlenwerte der Polynome an den Tarifbereichsübergangsstellen (mit Ausnahme der Bereichsübergangsstelle beim Grundfreibetrag) nicht stetig.

Verallgemeinerung:
Es kann auch eine allgemeine Formel zur Berechnung des Steuertarifs unter den Nebenbedingungen bekannter Grenzsteuersätze und Tarifbereichsgrenzen ermittelt werden:

Satz (Berechnung eines quadratischen und linearen Steuertarifs):
Für die Steuerfunktion s(x) in Abhängigkeit des zu versteuernden Einkommens x gelte

$$s(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } 0 \le x \le R_1 \\ f_2(x) & \text{für } R_1 < x \le R_2 \\ f_3(x) & R_2 < x \le R_3 \\ \ldots & \\ f_n(x) & \text{für } R_{n-1} < x \end{cases} .$$

n ist die Anzahl der Tarifbereiche. R_k ist die rechte Bereichsgrenze des k-ten Tarifbereichs, wobei R_1 der Grundfreibetrag ist. Ferner sind die Grenzsteuersätze $GSt(R_k)$ für $k = 1, 2, \ ,$ $n-1$ vorgegeben.

Wenn die (ungerundete) Steuerfunktion stetig sein soll, gilt:

(i) Für den ersten Tarifbereich gilt: $f_1(x) = 0$ für $x \le R_1$.

(ii) Für den k-ten Tarifbereich, k = 2, 3, … , n ergibt sich
unter der Voraussetzung einer quadratischen Funktion die Steuerfunktion

$$f_k(x) = \frac{10.000^2}{2} \cdot \frac{GSt(R_k) - GSt(R_{k-1})}{R_k - R_{k-1}} \cdot \left(\frac{x - R_{k-1}}{10.000}\right)^2 + 10.000 \cdot GSt(R_{k-1}) \cdot \frac{x - R_{k-1}}{10.000} + f_{k-1}(R_{k-1})$$

und unter der Voraussetzung einer linearen Steuerfunktion

$$f_k(x) = GSt(R_{k-1}) \cdot x + f_{k-1}(R_{k-1}) - GSt(R_{k-1}) \cdot R_{k-1} .$$

Beweis:
a) Für den k-ten Tarifbereich ergibt sich unter der Voraussetzung einer quadratischen Funktion $f_k(x) = a_k \cdot \left(\frac{x - R_{k-1}}{10.000}\right)^2 + b_k \cdot \frac{x - R_{k-1}}{10.000} + c_k$ und den Nebenbedingungen

(i) $f_k(R_{k-1}) = f_{k-1}(R_{k-1})$, da die Steuerfunktion stetig sein soll.

(ii) $f_k'(R_{k-1}) = GSt(R_{k-1})$, da der Grenzsteuersatz an den Bereichsgrenzen vorgegeben ist.

(iii) $f_k'(R_k) = GSt(R_k)$.

c_k folgt sofort aus (i). Wegen $f_k'(x) = 2a_k \cdot \left(\frac{x - R_{k-1}}{10.000^2}\right) + \frac{b_k}{10.000}$ ergibt sich aus (ii)
$b_k = 10.000\ GSt(R_{k-1})$. Mit (iii) kann nun a_k ausgerechnet werden. Es gilt

$$f_k'(R_k) = 2a_k \cdot \left(\frac{R_k - R_{k-1}}{10.000^2}\right) + \frac{b_k}{10.000} = 2a_k \cdot \left(\frac{R_k - R_{k-1}}{10.000^2}\right) + GSt(R_{k-1}) = GSt(R_k)$$

Also $a_k = \frac{10.000^2}{2} \cdot \frac{GSt(R_k) - GSt(R_{k-1})}{R_k - R_{k-1}}$.

b) Für den k-ten Tarifbereich ergibt sich unter der Voraussetzung einer linearen Funktion $f_k(x) = a_k \cdot x + c_k$ und den Nebenbedingungen
$f_k(R_{k-1}) = f_{k-1}(R_{k-1})$ und $f_k'(R_{k-1}) = GS(R_{k-1})$
die Steuerfunktion
$f_k(x) = GSt(R_{k-1}) \cdot x + f_{k-1}(R_{k-1}) - GSt(R_{k-1}) \cdot R_{k-1}$.

Beispiel:

Für den Tarif 2014 gelten die Bereichsgrenzen $R_1 = 8.354$ und $R_2 = 13.469$. Für den Grenzsteuersatz wird vorgegeben: GSt(8.354) = 0,14 und GSt(13.469) = 0,2397.

Im zweiten Tarifbereich gilt nach dem Einkommensteuergesetz: (974,58y + 1400) y.
Dies kann mit dem obigen Satz ermittelt werden:

Aus der Angaben des obigen Satzes folgt für k = 2:
$f_1(R_{k-1}) = f_1(8.354) = 0$. Da für den zweiten Tarifbereich eine quadratische Funktion vorliegen soll, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{10.000^2}{2} \cdot \frac{GSt(R_k) - GSt(R_{k-1})}{R_k - R_{k-1}} \cdot \left(\frac{x - R_{k-1}}{10.000}\right)^2 \\
&\qquad + 10.000 \cdot GSt(R_{k-1}) \cdot \frac{x - R_{k-1}}{10.000} + f_{k-1}(R_{k-1}) \\
&= \frac{10.000^2}{2} \cdot \frac{0{,}2397 - 0{,}14}{13.469 - 8.354} \cdot \left(\frac{x - 8.354}{10.000}\right)^2 + (10.000 \cdot 0{,}14) \cdot \frac{x - 8.354}{10.000} + 0 \\
&= 974{,}58455 \cdot \left(\frac{x - 8.354}{10.000}\right)^2 + 1400 \cdot \frac{x - 8.354}{10.000} .
\end{aligned}$$

Nach der Rundung auf zwei Dezimalstellen ergibt sich der Steuertarif des Einkommensteuergesetzes in Deutschland.

3 Literatur

Lüpertz, V.; Reip, S.; Rozynski, H; Rozynski, T. (2015): Wirtschaftsrecht für Bankberufe. Gesetze – Verordnungen – Vereinbarungen; Haan-Gruiten: Europa-Lehrmittel; 15. Aufl.

Pfeifer, A. (2009): Praktische Finanzmathematik; Frankfurt: Verlag Harri Deutsch (jetzt: Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel), 5. überarb. Aufl.

Pfeifer, A. (2013): Progressiv und degressiv steigende Funktionen; WISU Zeitschrift für Ausbildung, Examen, Berufseinstieg und Fortbildung 05/13, S. 700 - 706